La Derivada del Coseno

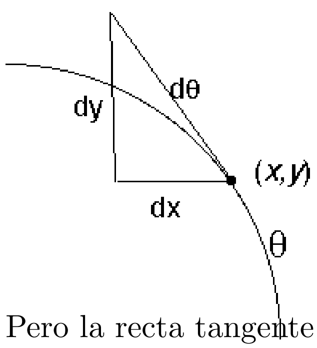
El círculo es $x^2 + y^2 = 1$. Al tomar la diferencial de ambos lados, obtenemos

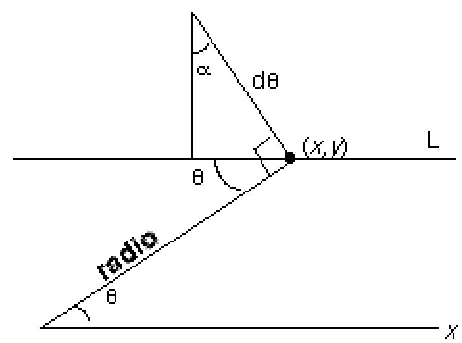
$$2xdx + 2ydy = 0.$$

Al resolver para dy obtenemos $dy = \frac{-x}{y}dx$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es igual a $\frac{-x}{y}$. ¿Cual es el negativo reciproco de esto? Es la pendiente de la recta normal, $\frac{y}{x}$ pero es igual a la pendiente de la linea recta del origen al punto (x, y), a saber, el radio. Entonces, la recta tangente es normal al radio (Euclides, Lib. III Prop. 18).

Ahora bien, $y = \operatorname{sen}\theta$ por definición, y $x = \cos\theta$ por definición, donde θ es el largo del arco desde el tres en la esfera de reloj a (x, y). Nos gustaría hallar $\frac{dx}{d\theta}$.

Fíjese que $d\theta$ es el cambio en la largura del arco por la recta tangente al círculo en (x, y). Así que hay un triángulo diferencial con una base dx, altura dy, e hipotenusa $d\theta$. Los dos ángulos agudos los llamemos α y $\frac{\pi}{2} - \alpha$.





Pero la recta tangente ($d\theta$) es normal al radio. Entonces, el ángulo marcado es recto.

El ángulo *alpha* del triángulo, ¿es equivalente a θ? Porque la linea L (que extiende la base del triángulo) es paralela al eje-x , Euclides I, 29, dice que los dos ángulos marcados como θ son bien iguales. Pero el ángulo θ es el complemento del ángulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$ del triángulo. Por lo tanto, $\theta = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha$.

Ahora bien el seno de α es igual al cociente de la base (que está al lado opuesto) por la hipotenusa, *esto es* , $\frac{-dx}{d\theta}$ (la longitud de la base es $-dx$ porque dx es negativo).

$$\text{Entonces,} \qquad \frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta, \qquad \text{Q.E.D.}$$